Cálculo Diferencial e Integral 2: Integrais Duplas

Jorge M. V. Capela

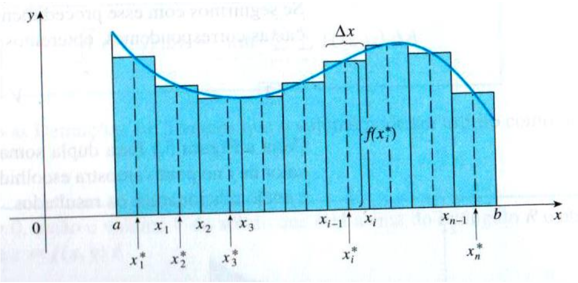
Instituto de Química - UNESP
Araraquara, SP

capela@iq.unesp.br

Araraquara, SP - 2017

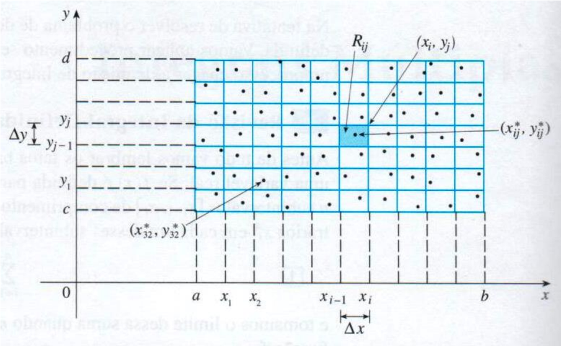
1. Integrais Duplas sobre Retângulos
2. Integrais duplas sobre regiões genéricas
3. Integrais duplas em coordenadas polares

Lembrete: Integral de uma variável



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Integrais Duplas sobre Retângulos



$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

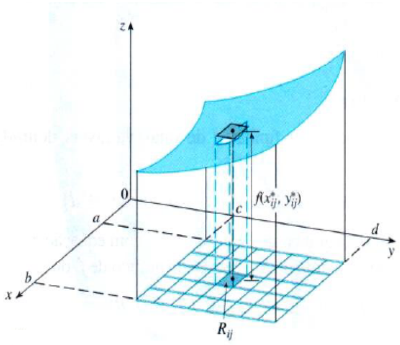
Integrais Duplas sobre Retângulos

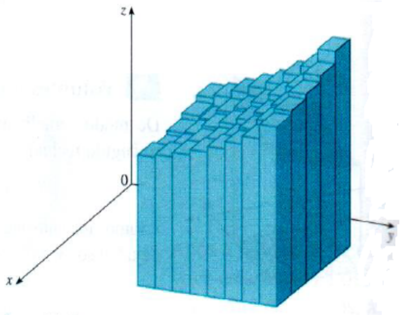
- O ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser qualquer um no sub-retângulo R_{ij}. Em particular podemos escolher o ponto (x_i, y_j).

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A$$

- Se $f(x) \geq 0$ então a integral dupla representa o volume do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x,y)$. Ver figura no próximo slide.

Integral Dupla com volume





Cálculo de uma integral dupla sobre um retângulo

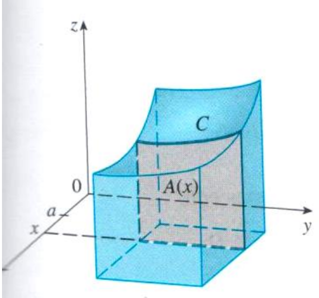
Seja $f(x, y)$ uma função contínua no retângulo definido por

$$R = \{(x, y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Então:

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy$$

Ver próximo slide.



$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$$\iint_R f(x, y)dA = V = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

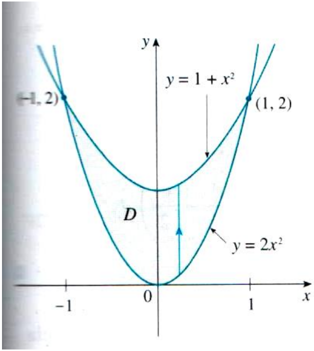
Exemplo 1

a) Calcule $\displaystyle\iint_R (x - 3y^2)dA$, onde $R = [0, 2] \times [1, 2]$

b) Calcule $\displaystyle\iint_R y \operatorname{sen} xy \, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$

c) Determine o volume do sólido delimitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, os planos $x = 2$, $y = 2$ e os três planos coordenados. Observe que $R = [0, 2] \times [0, 2]$.

Exemplo 2: Integral dupla sobre uma região genérica

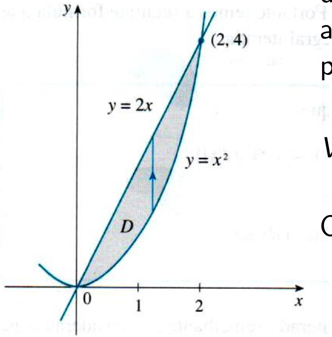


Calcule $\iint_D (x + 2y)dA$ onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

$$\iint_D (x+2y)dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dydx$$

$$= \cdots = \frac{32}{15}$$

Exemplo 3: Integral dupla sobre uma região genérica



Determine o volume do sólido contido debaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

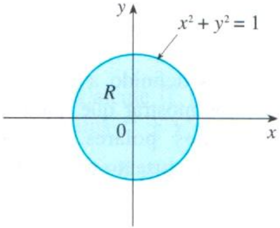
$$V = \iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dydx$$

Outra expressão para V:

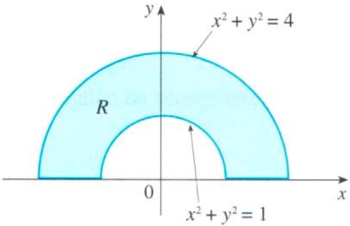
$$V = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dydx$$

Em ambos os casos encontra-se $V = \dfrac{216}{35}$.

Coordenadas Polares



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$

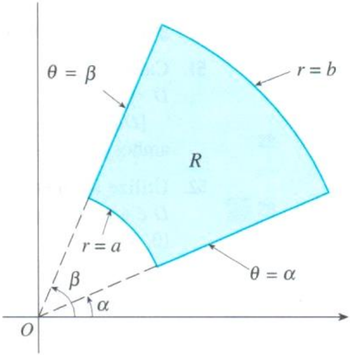


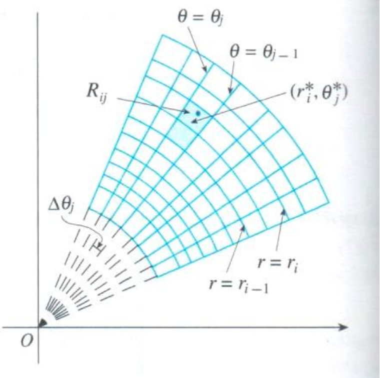
(a) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$

Relação entre coordenadas retangulares e polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

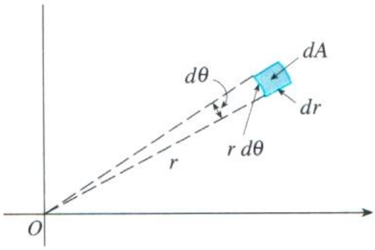
Retângulo Polar





Integral dupla em coordenadas polares

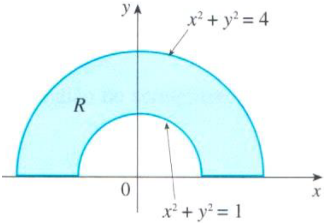
Seja $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Então



$$\iint_R f(x,y)dA =$$

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta) r dr d\theta$$

Exemplo 4



Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\,dA$, onde R é a região do semiplano superior limitado pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Coordenadas polares:

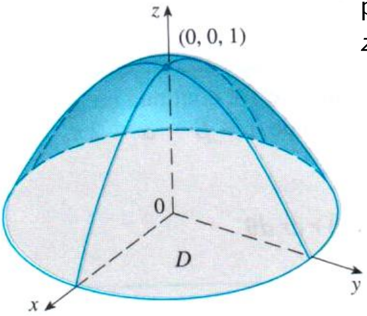
$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Observação:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

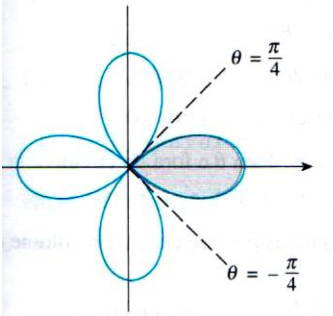
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Exemplo 5



Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Exemplo 6



Use uma integral dupla para calcular a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

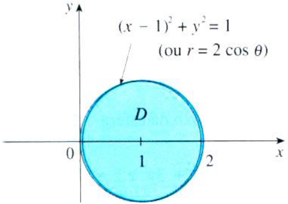
Laço da rosácea:

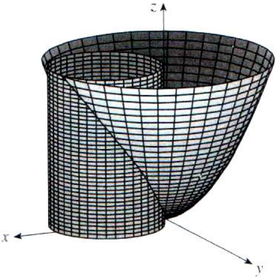
$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \cos 2\theta$$

$$A = \iint_R dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta$$

Observação: $\cos^2 \theta = (1/2)(1 + \cos 4\theta)$

Exemplo 7





Determinar o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do circulo $x^2 + y^2 = 2x$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta$$

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dA =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (x^2 + y^2) r dr d\theta$$

Exercícios

1) Determine o volume do sólido abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$
2) Calcule as integrais trocando a ordem de integração

$$a) \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy \qquad b) \int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2) dxdy$$

3) Calcule a integral $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dA$, onde D é a região do plano definida por $x^2 + y^2 \leq 1$. Indentifique a integral como sendo o volume de um sólido.
4) Utilize coordenadas polares para calcular o volume de uma esfera de raio a.

5) Utilize coordenadas polares para calcular a integral $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde D é a região delimitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ e o eixo y.

6) Calcule a integral dupla $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx$

7) Definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx = \lim_{a\to+\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco de raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx = \pi$$

8) Uma definição equivalente da integral imprópria do exercício 7 é

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx = \lim_{a\to+\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado de vértices $(\pm a, \pm a)$. Observe que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

e mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$